

Differentiation

* Basic Rules *

1] $y = C$ [حيث C ثابت] $\Rightarrow y' = 0$

ex:

$$y = 3 \Rightarrow y' = 0$$

2] $y = x^n \Rightarrow y' = n x^{n-1}$

ex:

$$y = x^7 \Rightarrow y' = 7 x^6$$

3] $y = [f]^n \Rightarrow y' = n [f]^{n-1} \cdot f'$
 (function الآلة)

ex: $y = [x^2 + 3x]^{10} \Rightarrow y' = 10 [x^2 + 3x]^9 \cdot (2x + 3)$

4] $y = \sqrt{f} \Rightarrow y' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

$\hookrightarrow (f)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} (f)^{-\frac{1}{2}} \cdot f'$

ex:

$$y = \sqrt{x^2 + 2} \Rightarrow y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 2}}$$

5] $y = f \cdot g \Rightarrow y' = f' \cdot g + g' \cdot f$

6] $y = \frac{f}{g} \Rightarrow y' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$

⑦ logarithmic function: الدالة اللوغاريتمية

$$y = \begin{cases} \ln(f) = \log_e(f) \\ \log_g(f) = \frac{\ln(f)}{\ln(g)} \end{cases} \quad (e=2.7)$$

$$y = \ln(f) \Rightarrow y' = \frac{f'}{f}$$

ex:

$$y = \ln(x^2+2) \Rightarrow y' = \frac{2x}{x^2+2}$$

⑧ Exponential function: الدالة الأسية

$$y = \begin{cases} e^f \Rightarrow y' = f' \cdot e^f \cdot \ln e \\ a^f \Rightarrow y' = f' \cdot a^f \cdot \ln a \end{cases}$$

دالة متغيرة g^f $\xrightarrow{\text{بأخذ اللوغاريتم للطرفين}} \ln y = \ln g^f \Rightarrow f \ln g$

ex1:

$$\bullet y = e^{4x} \Rightarrow y' = 4e^{4x}$$

$$\bullet y = 5^{x^2} \Rightarrow y' = 2x \cdot 5^{x^2} \cdot \ln 5$$

$$\bullet y = (x)^{x^2+1} \Rightarrow \ln y = (x^2+1) \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = 2x \ln x + (x^2+1) \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = \left[2x \ln x + (x^2+1) \cdot \frac{1}{x} \right] y$$

$$y' = \left[2x \ln x + (x^2+1) \cdot \frac{1}{x} \right] (x)^{x^2+1}$$

ex 2: $y = (x)^{\sin x}$
 $\hookrightarrow \ln y = \sin x \ln x$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = \left[\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \right] y$$

$$y' = \left[\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \right] (x)^{\sin x}$$

[9] الدوال المثلثية

y	y'
$\sin(f)$	$\cos(f) \cdot f'$
$\cos(f)$	$-\sin(f) \cdot f'$
$\tan(f)$	$\sec^2(f) \cdot f'$
$\cot(f)$	$-\csc^2(f) \cdot f'$
$\sec(f)$	$\sec(f) \cdot \tan(f) \cdot f'$
$\csc(f)$	$-\csc(f) \cdot \cot(f) \cdot f'$

ex. • $y = \sec(e^{x^2})$

$$\hookrightarrow y' = 2x e^{x^2} \cdot \sec e^{x^2} \cdot \tan e^{x^2}$$

• $y = \tan(\ln x^2)$

$$\hookrightarrow y' = \frac{2x}{x^2} \cdot \sec^2 \ln x^2$$

15 الدوال العكسية

y	y'
$\sin^{-1} f$	$\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$\cos^{-1} f$	-
$\tan^{-1} f$	$\frac{f'}{1+f^2}$
$\cot^{-1} f$	-
$\sec^{-1} f$	$\frac{f'}{f\sqrt{f^2-1}}$
$\csc^{-1} f$	-



$$\sin^{-1} f \neq (\sin f)^{-1}$$

$$\sin x^2 + \cos x^2 = 1$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

ex: $y = \sin^{-1}(\sin x^2)$

$$y' = \frac{2x \cdot \cos x^2}{\sqrt{1 - (\sin x^2)^2}}$$

$y = \sec^{-1}(\ln \tan e^{x^2})$

$$y' = \frac{2x \cdot e^{x^2} \cdot \sec^2 e^{x^2}}{\ln \tan e^{x^2} \sqrt{(\ln \tan e^{x^2})^2 - 1}}$$

⑪ Explicit Diff. تفاديل صنف

$$y^2 x + y^3 = \tan x^2$$

$$2yy'x + y^2 + 3y^2y' = 2x \sec^2(x^2)$$

$$y'(2yx + 3y^2) = 2x \sec^2(x^2) - y^2$$

$$y' = \frac{2x \sec^2(x^2) - y^2}{2yx + 3y^2}$$

⑫ Chain Rule.. قاعدة السلسلة

$$y = 5z^3, \quad z = (2x^2 + 1)$$

$$\left(\begin{array}{l} y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \\ \frac{dy}{dz} = 15z^2 \quad \frac{dz}{dx} = 4x \end{array} \right)$$

$$\therefore y' = 60xz^2 = 60x(2x^2 + 1)^2$$

⑬ Higher order Diff. المشتقات العليا

$$y \Rightarrow y' \Rightarrow y'' \Rightarrow y'''$$

تفاضل الدوال الزائدية

y	y'
$\sinh f$	$f' \cosh f$
$\cosh f$	$f' \sinh f$
$\tanh f$	$f' \operatorname{sech}^2 f$
$\coth f$	$-f' \operatorname{csch}^2 f$
$\operatorname{sech} f$	$-f' \operatorname{sech} f \tanh f$
$\operatorname{csch} f$	$-f' \operatorname{csch} f \coth f$

ex:-

$$① y = \tanh(\sin^{-1} e^{3x})$$

$$y' = \frac{3e^{3x}}{\sqrt{1-(e^{3x})^2}} \operatorname{sech}^2(\sin^{-1} e^{3x})$$

$$② y = \operatorname{sech}(\ln x^{-1})$$

$$y' = \frac{x^{-2}}{x^{-1}} \operatorname{sech}(\ln x^{-1}) \tanh(\ln x^{-1})$$

$$③ y = \cosh(\ln \cos^{-1} 3x)$$

$$y' = -\frac{\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}}{\cos^{-1} 3x} \sinh(\ln \cos^{-1} 3x)$$

15) تفاضل العالزاذية العكسية

y	y'
$\sinh^{-1} f$	$\frac{f'}{\sqrt{1+f^2}}$
$\cosh^{-1} f$	$\frac{f'}{\sqrt{f^2-1}}$
$\tanh^{-1} f$	$\frac{f'}{1-f^2}, f' < 1$
$\coth^{-1} f$	$\frac{f'}{1-f^2}, f' > 1$
$\operatorname{sech}^{-1} f$	$\frac{f'}{f\sqrt{1-f^2}}$
$\operatorname{csch}^{-1} f$	$\frac{-f'}{f\sqrt{1+f^2}}$

ex:

① $y = \cosh^{-1} (\ln \sin x)$

$$y' = \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\sqrt{(\ln \sin x)^2 - 1}}$$

② $y = (\operatorname{sech}^{-1} 2x)^3$

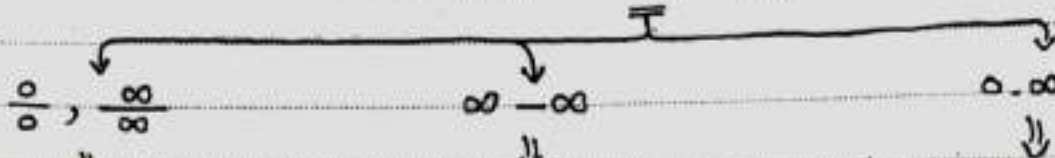
$$y' = 3 (\operatorname{sech}^{-1} 2x)^2 \cdot \frac{2}{2x\sqrt{1-4x^2}}$$

③ $y = \tanh^{-1} \sqrt{\tan x}$

$$y' = \frac{\frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}}{1 - \tan x}$$

أيجاد النهايات [قاعدة لوبيتال]

• كميات غير معينة / غير محددة •



$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

• يتم تطبيق قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = \infty - \infty$$

• نوجد المقامات ثم يتم تطبيق قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot \infty$$

• نجعل احدي الدالتين مقام للآخرى ثم تطبيق قاعدة لوبيتال

ex:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right] = \infty - \infty$$

① نعوذنا تعويضنا مباشر عن قيمة (x) فنجد أن الناتج $\infty - \infty$
 ② نوجد المقامات

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt{x-1} - (x-1)}{(x-1)\sqrt{x-1}} \right] = \frac{0}{0}$$

لما وصلنا لـ $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \right)$ نطبق قاعدة لوبيتال

ex: $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x \cdot \frac{1}{x} = 0 \cdot \infty$

• نجعل احدي الدالتين مقام الاخرى

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\cot x} = \frac{\infty}{\infty}$$

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{0}{0}$

* قاعدة لوبيتال *

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{[undetermined Value]}$$

• كيفية تطبيق قاعدة لوبيتال :-

- نفاضل البسط لوضه

- نفاضل المقام لوضه

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

لو لمع الناتج $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ مرة كمان $\Leftarrow$ نطبق لوبيتال كمان مرة

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

ex:- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sec 3x \cdot \cos 5x$

• نعوضها تعويضاً مباشراً ونحدد الحالة

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sec 3x \cdot \cos 5x = \infty \cdot 0$$

• نجعل إحدى الدالتين مقام الأخرى

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x} = \frac{0}{0}$$

• بتطبيق قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-5 \sin \frac{5\pi}{2}}{-3 \sin \frac{3\pi}{2}} = \frac{-5}{3}$$

$\Leftarrow$ لاحظ أن ∞ كمية معينة

يعني لو جيت تعوضها ولمع

الناتج ∞ يتفاد خلاصه لا تطبق

قاعدة لوبيتال

$$\frac{\square}{0} = \infty$$

$$e^{\infty} = \infty$$

$$e^0 = 1$$

$$e^{-\infty} = 0$$

$$\ln 0 = -\infty$$

ex:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec x \sec x \tan x}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

$$2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^4 x + 2 \sec^2 x \tan^2 x}{\cos x} = \boxed{2}$$

ex:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\ln(x+3)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{\frac{1}{x+3}} = \boxed{1}$$

* مفكوك الدوال عند نقطة:

• مفكوك تيلور: $\boxed{x=a}$

$$F(x) = F(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \frac{(x-a)^4}{4!} f^{(4)}(a) + \dots$$

أوجد التلات حدود التلور من مفكوك الدالة:

ex: $F(x) = \ln(x)$, $x=1$

$$\ln(x) = F(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!} f''(1) + \frac{(x-1)^3}{3!} f'''(1) + \frac{(x-1)^4}{4!} f^{(4)}(1)$$

$$\rightarrow F(1) = 0$$

$$\rightarrow F'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F'(1) = 1$$

$$\rightarrow F''(x) = -x^{-2} \Rightarrow F''(1) = -1$$

$$\rightarrow F'''(x) = 2x^{-3} \Rightarrow F'''(1) = 2$$

$$\rightarrow F^{(4)}(x) = -6x^{-4} \Rightarrow F^{(4)}(1) = -6$$

$$\therefore \ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}$$

لما يطلب عدد معين من الحدود لازم العدد ده يكون ليه قيمه
بمعنى أنه لو طلع حد = صفر متغيرهوش من ضمن الحدود
المطلوبة.

* مفكوك ماكلورين: $\boxed{x=0}$

$$F(x) = F(0) + xF'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(0)$$

ex:

$$F(x) = \ln(x+1)$$

$$F(0) = 0$$

$$F'(x) = (x+1)^{-1} \Rightarrow F'(0) = 1$$

$$F''(x) = -(x+1)^{-2} \Rightarrow F''(0) = -1$$

$$F'''(x) = 2(x+1)^{-3} \Rightarrow F'''(0) = 2$$

$$F^{(4)}(x) = -6(x+1)^{-4} \Rightarrow F^{(4)}(0) = -6$$

$$\therefore \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

اثبات قوانين الدوال العكسية:

* $y = \sin^{-1} x \rightarrow ①$

بأخذ Sin الطرفين

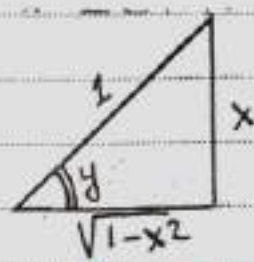
$$\sin y = \sin \sin^{-1} x$$

$$\sin y = x \rightarrow ②$$

$$y' \cos y = 1$$

$$y' = \frac{1}{\cos y}$$

$$\therefore y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



$$\cos y = \sqrt{1-x^2}$$

* $y = \cos^{-1} x$

بأخذ Cos الطرفين

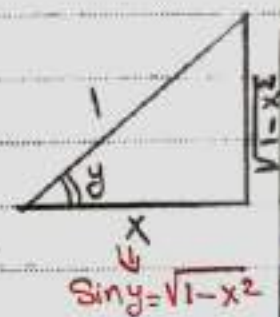
$$\cos y = \cos \cos^{-1} x$$

$$\cos y = x$$

$$-y' \sin y = 1$$

$$y' = \frac{-1}{\sin y}$$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$



$$\sin y = \sqrt{1-x^2}$$

* $y = \tan^{-1} x$

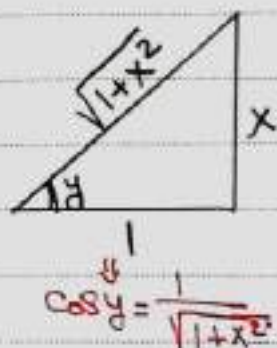
$$\tan y = \tan \tan^{-1} x$$

$$\tan y = x$$

$$y' \sec^2 y = 1$$

$$y' = \frac{1}{\sec^2 y} = \cos^2 y$$

$$\therefore y' = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^2} = \frac{1}{1+x^2}$$



$$\cos y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

* $y = \sec^{-1} x$

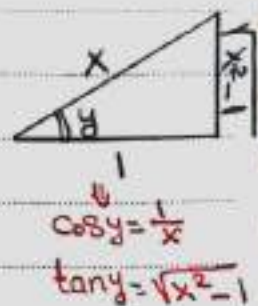
$$\sec y = \sec \sec^{-1} x$$

$$\sec y = x$$

$$y' \sec y \tan y = 1$$

$$y' = \frac{1}{\sec y \tan y}$$

$$y' = \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}}$$



$$\cos y = \frac{1}{x}$$

$$\tan y = \sqrt{x^2-1}$$

* $y = \csc^{-1} x$

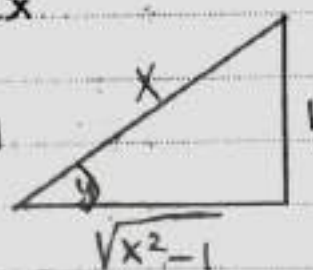
$$\csc y = \csc \csc^{-1} x$$

$$\csc y = x$$

$$-y' \cot y \csc y = 1$$

$$y' = \frac{-1}{\csc y \cot y}$$

$$y' = \frac{-1}{x \sqrt{x^2-1}}$$



* $y = \cot^{-1} x$

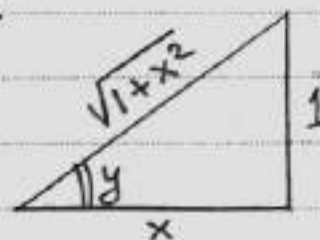
$$\cot y = \cot \cot^{-1} x$$

$$\cot y = x$$

$$-y' \csc^2 y = 1$$

$$y' = \frac{-1}{\csc^2 y}$$

$$y' = \frac{-1}{1+x^2}$$



* (Continuity) اتصال الدالة عند نقطة

→ $f(x)$ is called continuous at x_0 if :-

① $f(a)$

② $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

③ $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

ex: $f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+3}}{x+1}, x \neq -1$

$\frac{3}{2}, x = -1$

① $f(-1) = \frac{3}{2}$

② $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+3}}{x+1} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{2x+3}} = -\frac{1}{2}$

③ $f(-1) \neq \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+3}}{x+1}$

∴ الدالة غير متصلة عند $x = -1$

ex: $f(x) = \frac{x+2\sin 3x}{\sin 5x}, x \neq 0$

$\frac{7}{5}, x = 0$

① $f(0) = \frac{7}{5}$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2\sin 3x}{\sin 5x} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+6\cos 3x}{5\cos 5x} = \frac{7}{5}$

∴ $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2\sin 3x}{\sin 5x} = \frac{7}{5}$

∴ الدالة متصلة عند $x = 0$

* علاقات الجوال المثلثية *

① $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

② $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

③ $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$

④ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

⑤ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
 $= 2 \cos^2 x - 1$
 $= 1 - 2 \sin^2 x$

* علاقات الجوال الزائدية *

① $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

② $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

③ $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$

④ $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

⑤ $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
 $= 2 \sinh^2 x + 1$
 $= 2 \cosh^2 x - 1$

important

⑥ $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

⑦ $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Basic rules of integration

① $\int 0 dx = C \rightarrow$ ثابت التكامل

② $\int a dx = ax + C$

ex: $\int 7 dx = 7x + C$

③ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

ex: $\int x^8 dx = \frac{x^9}{9} + C$

④ $\int (f)^n f' dx = \frac{(f)^{n+1}}{n+1} + C$

ex: $\int 2x (x^2+1)^{10} dx = \frac{(x^2+1)^{11}}{11} + C$

⑤ $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1) \cdot a} + C$

ex: $\int (3x+10)^{30} dx = \frac{(3x+10)^{31}}{31 \cdot 3} + C$
 مشتقة ما بداخل القوس

⑥ $\int \left(\frac{f'}{f}\right) dx = \ln f + C$

ex: $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx = \ln \tan x + C$

⑦ $\int f' e^f dx = e^f + C$

ex: $\int 2x e^{x^2} dx = e^{x^2} + C$

⑧ $\int f' a^f dx = \frac{a^f}{\ln a} + C$

ex: $\int (-\sin x) 5^{\cos x} dx = \frac{5^{\cos x}}{\ln 5} + C$

$\int e^{2x} dx$
 $= \frac{1}{2} \int 2 e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$

ملحوظة:
 التكامل يتوزع على الجمع والطرح
 عادى لكن لا يوزع على الم ضرب
 والقسمة

في الدوال المثلثية والزائدية عند التكامل
 ينقسم على تفاضل الزاوية إذا كانت
 الزاوية من الدرجة الأولى

Page/

Date/

الدوال الزائدية [١٥] الدوال المثلثية [٩]

الدالة	تكاملها	الدالة	تكاملها
$\sin x$	$-\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\cos x$	$\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\sec^2 x$	$\tan x$	$\operatorname{sech}^2 x$	$\tanh x$
$\csc^2 x$	$-\cot x$	$\operatorname{csch}^2 x$	$-\coth x$
$\sec x \tan x$	$\sec x$	$\operatorname{sech} x \tanh x$	$-\operatorname{sech} x$
$\csc x \cot x$	$-\csc x$	$\operatorname{csch} x \coth x$	$-\operatorname{csch} x$

الدوال الزائدية العكسية [١٢] الدوال المثلثية العكسية [١١]

الدالة	تكاملها	الدالة	تكاملها
$\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$\sin^{-1} f$	$\frac{f'}{\sqrt{1+f^2}}$	$\sinh^{-1} f$
$\frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$\cos^{-1} f$	$\frac{f'}{\sqrt{f^2-1}}$	$\cosh^{-1} f$
$\frac{f'}{1+f^2}$	$\tan^{-1} f$	$\frac{f'}{1-f^2}$	$\tanh^{-1} f$
$\frac{-f'}{1+f^2}$	$\cot^{-1} f$	$\frac{f'}{1-f^2}$	$\coth^{-1} f$
$\frac{f'}{f\sqrt{f^2-1}}$	$\sec^{-1} f$	$\frac{-f'}{f\sqrt{f^2+1}}$	$\operatorname{sech}^{-1} f$
$\frac{-f'}{f\sqrt{f^2-1}}$	$\csc^{-1} f$	$\frac{-f'}{f\sqrt{1-f^2}}$	$\operatorname{csch}^{-1} f$

examples:

$$① \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1}x + C$$

$$② \int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx = \tan^{-1}(\sin x) + C$$

$$③ \int \frac{x^5 + x - 2}{\sqrt{x}} dx$$

نوزع البسط على المقام.

$$\int \left(\frac{x^5}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} \right) dx$$

$$\int (x^{\frac{9}{2}} + x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}) dx = \frac{2}{11} x^{\frac{11}{2}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$④ \int (4x-5)^{35} dx = \frac{(4x-5)^{36}}{36 \cdot 4} + C$$

$$⑤ \int (x^3+2)^3 dx$$

$$= \int [(x^3+2)^2 (x^3+2)] dx$$

$$= \int [(x^6+4x^3+4)(x^3+2)] dx$$

$$= \int (x^9+4x^6+4x^3+2x^6+8x^3+8) dx$$

$$= \int (x^9+6x^6+12x^3+8) dx = \frac{x^{10}}{10} + 6 \frac{x^7}{7} + 12 \frac{x^4}{4} + 8x + C$$

$$⑥ \int \frac{dx}{1+e^{-x}} \quad x \frac{e^x}{e^x}$$

$$\int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \ln(e^x+1) + C$$

$$⑦ \int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$= \int \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

$$⑧ \int \frac{1+\cos x}{x+\sin x} = \ln(x+\sin x) + C$$

⑨ $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$ * بالضرب في المرافق *

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{(x+1) - x} dx$$

$$= \int \left[(x+1)^{\frac{1}{2}} + (x)^{\frac{1}{2}} \right] dx = \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

• قوانين مستنتجة •

$$* \int \tan x \, dx = \int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln \cos x + C = \ln \sec x + C$$

$$* \int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln \sin x + C$$

$$* \int \tan^2 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \, dx = \tan x - x + C$$

$$* \int \cot^2 x \, dx = \int (\csc^2 x - 1) \, dx = -\cot x - x + C$$

$$* \int \sec x \, dx = \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx \Rightarrow \text{السطح مشتقة المقام}$$

$$= \ln(\sec x + \tan x) + C$$

$$* \int \csc x \, dx = \int \csc x \cdot \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x} \, dx$$

$$= \int \frac{-(\csc^2 x + \csc x \cot x)}{\csc x + \cot x} \, dx \Rightarrow \text{السطح مشتقة المقام}$$

$$= -\ln(\csc x + \cot x) + C$$

$$\begin{aligned}
 * \int \sin^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \\
 &= \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right] + C
 \end{aligned}$$

تذكر أن: $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$

$$\begin{aligned}
 * \int \cos^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \\
 &= \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right] + C
 \end{aligned}$$

تذكر أن: $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$

قوانين هامة:

- $\sin ax \cos bx = \frac{1}{2} [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]$
- $\sin ax \sin bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$
- $\cos ax \cos bx = \frac{1}{2} [\cos(a+b)x + \cos(a-b)x]$

خاصة بالك: $\sin(-x) = -\sin(x)$

examples:

$$\begin{aligned}
 ① \int \sin 3x \sin 5x \, dx &= \int \frac{1}{2} [\cos 2x - \cos 8x] \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 8x}{8} \right] + C
 \end{aligned}$$

• $\sin(-x) = -\sin(x)$
 • $\cos(-x) = \cos(x)$
 • $\tan(-x) = -\tan(x)$

$$\begin{aligned}
 ② \int \cos 3x \cos 3x \, dx &= \int \frac{1}{2} [\cos 6x + \cos 0x] \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 6x}{6} + x \right] + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ③ \int \sin 7x \cos 5x \, dx &= \int \frac{1}{2} [\sin 12x + \sin 2x] \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos 12x}{12} - \frac{\cos 2x}{2} \right] + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \int \sin^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \sin x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx \\ &= \int (\sin x - \sin x \cos^2 x) \, dx \\ &= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \int \cos^3 x \, dx &= \int \cos x \cos^2 x \, dx \\ &= \int \cos x (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= \int (\cos x - \sin^2 x \cos x) \, dx \\ &= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C \end{aligned}$$

☹☹ → important Note:

$$* (A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$* (A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

* integration by Substitution: التكامل بالتعويض

• خطوات الحل:

- ① نعرفن المقدار u
- ② $dx = \frac{du}{u'}$
- ③ نحل المسألة الأولية بدلالة u , du
- ④ تكامل المسألة
- ⑤ نعوّض عن قيمة u ونطابق الناتج بدلالة x

① التعويض الجبري:

① مقدار جبري $\leftarrow$ نعرفن الأكثر تعقيداً $u =$

ex:

$$I = \int x^5 (x^2 + 6)^6 dx$$

$$\text{let: } u = x^2 + 6, \quad dx = \frac{du}{2x}$$

$$x^2 = u - 6 \Rightarrow x^4 = (u - 6)^2$$

$$\int x^5 u^6 \cdot \frac{du}{2x} = \int \cancel{x^4} u^6 \cdot \frac{du}{2}$$

$$= \int (u - 6)^2 u^6 \frac{du}{2}$$

$$\frac{1}{2} \int (u - 6)^2 u^6$$

$$\frac{1}{2} \int (u^2 - 12u + 36) u^6$$

$$\frac{1}{2} \int u^8 - 12u^7 + 36u^6$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{u^9}{9} - 12 \frac{u^8}{8} + 36 \frac{u^7}{7} \right] + C$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 + 6)^9}{9} - 12 \frac{(x^2 + 6)^8}{8} + 36 \frac{(x^2 + 6)^7}{7} \right] + C$$

② لو عندك دالة مثلثية أو زائدية وكانت الزاوية غير مبرجة (في x)
نفرم الزاوية = u

ex1:

$$I = \int e^x \tan e^x dx$$

Let: $e^x = u$

$$dx = \frac{du}{e^x}$$

$$\int \cancel{e^x} \tan u \cdot \frac{du}{\cancel{e^x}}$$

$$\int \tan u \cdot du$$

$$= \int \frac{-\sin u}{\cos u} du$$

$$= -\ln \cos u + C$$

$$= \ln \sec u + C$$

$$= \ln \sec e^x + C$$

③ لو عندك دالة أسية $\Leftarrow$ نفرم $u = e^x$

ex:

$$I = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

Let: $u = e^x$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$$

$$\int \frac{1}{u + \frac{1}{u}} \cdot \frac{du}{u}$$

$$= \int \frac{\frac{du}{u}}{\frac{u^2 + 1}{u}}$$

$$= \int \frac{du}{u^2 + 1}$$

$$= \tan^{-1} u + C$$

$$= \tan^{-1} e^x + C$$

ex: $I = \int \operatorname{sech} x dx$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\int \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx$$

Let: $u = e^x$

$$dx = \frac{du}{e^x}$$

$$\int \frac{2}{u + \frac{1}{u}} \cdot \frac{du}{u} = \int \frac{2 \frac{du}{u}}{\frac{u^2 + 1}{u}}$$

$$= 2 \int \frac{du}{u^2 + 1}$$

$$= 2 \tan^{-1} u + C$$

$$= 2 \tan^{-1} e^x + C$$

④ لو عندك جذر $\Rightarrow$ نضع ماتحت الجذر بـ u^2

ex

$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

let: $u^2 = 1 - x^4$

$$dx = \frac{du}{\frac{-4x^3}{2u}}$$

$$I = \int \frac{x^3}{x} \cdot \frac{2u du}{-4x^3}$$

$$= \int \frac{-du}{2} = -\frac{1}{2} u + C = -\frac{1}{2} \sqrt{1-x^4} + C$$

⑤ النوعين الثالث:

$$* \int \sqrt{a^2 - b^2 x^2} \Rightarrow x = \frac{a}{b} \sin \theta$$

$$* \int \sqrt{a^2 + b^2 x^2} \Rightarrow x = \frac{a}{b} \tan \theta$$

$$* \int \sqrt{b^2 x^2 - a^2} \Rightarrow x = \frac{a}{b} \sec \theta$$

ex:

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx$$

let: $x = 3 \sin \theta \Rightarrow dx = 3 \cos \theta d\theta$

$$\int \frac{\sqrt{9-9\sin^2 \theta}}{9\sin^2 \theta} \cdot 3 \cos \theta d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{9(1-\sin^2 \theta)}}{9\sin^2 \theta} \cdot 3 \cos \theta d\theta$$

$$\int \frac{3 \cos \theta}{9 \sin^2 \theta} \cdot 3 \cos \theta d\theta$$

$$\int \frac{9 \cos^2 \theta}{9 \sin^2 \theta} d\theta = \int \cot^2 \theta d\theta$$

$$\int \cot^2 \theta \, d\theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

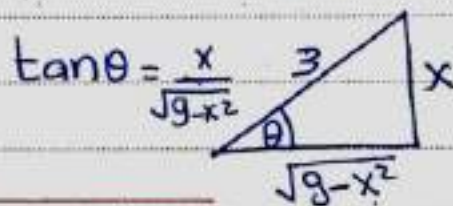
$$\int (\csc^2 \theta - 1) \, d\theta$$

$$= -\cot^2 \theta - \theta + C$$

$$= \cancel{\sqrt{9-x^2}} = \boxed{-\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)}$$

$$x = 3 \sin \theta$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{x}{3}$$



$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-9}}$$

$$\text{let: } x = 3 \sec \theta \Rightarrow dx = 3 \sec \theta \tan \theta$$

$$\int \frac{3 \sec \theta \tan \theta}{9 \sec^2 \theta \sqrt{9 \sec^2 \theta - 9}}$$

$$\int \frac{\tan \theta}{3 \sec \theta \sqrt{9(\sec^2 \theta - 1)}}$$

$$\int \frac{\tan \theta}{9 \sec \theta \tan \theta}$$

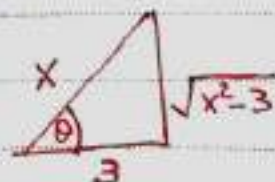
$$x = 3 \sec \theta$$

$$\sec \theta = \frac{x}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{x}$$

$$\frac{1}{9} \int \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{9} \sin \theta + C$$

$$= \frac{1}{9} * \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} + C$$



$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}}$$

$$\text{let: } x = 2 \tan \theta \Rightarrow dx = 2 \sec^2 \theta d\theta$$

$$\int \frac{2 \sec^2 \theta d\theta}{4 \tan^2 \theta \sqrt{4 \tan^2 \theta + 4}}$$

$$\int \frac{2 \sec^2 \theta d\theta}{4 \tan^2 \theta \sqrt{4(\tan^2 \theta + 1)}}$$

$$\frac{1}{4} \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\tan^2 \theta \sqrt{\sec^2 \theta}}$$

$$\frac{1}{4} \int \frac{\sec^2 \theta}{\tan^2 \theta \sec \theta} d\theta$$

$$\frac{1}{4} \int \frac{\sec \theta}{\tan^2 \theta} d\theta$$

$$\frac{1}{4} \int \frac{1}{\cos \theta} \cdot \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) d\theta$$

$$\frac{1}{4} \int \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$\frac{1}{4} \int \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{1}{\sin \theta} d\theta$$

$$\frac{1}{4} \int \cot \theta \cdot \csc \theta d\theta$$

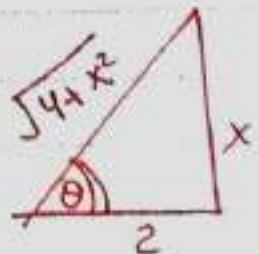
$$-\frac{1}{4} \csc \theta + C$$

$$= -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$$

$$x = 2 \tan \theta$$

$$\tan \theta = \frac{x}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$$



* integration by parts:

التكامل بالتجزئ

• يبذل مشكلة تكامل الضرب لو فتنطش بالقواعد الأساسية:

تكاملا $\int$ دالة أسية * كثيرة حدود $\int$ تكاملا

$$\int u dv = uv - \int v du$$

ex: $I = \int x e^x dx$

$$\begin{array}{l} u = x \quad dv = e^x dx \\ du = 1 dx \quad \swarrow \quad v = e^x \end{array}$$

$$\begin{aligned} I &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C \end{aligned}$$

ex: $I = \int x^2 e^{2x} dx$

$$\begin{array}{l} u = x^2 \quad dv = e^{2x} dx \\ du = 2x dx \quad \swarrow \quad v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array}$$

$$I = x^2 \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot 2x dx$$

Put: $I_1 = \int e^{2x} \cdot x dx$

$$\begin{array}{l} u = x \quad dv = e^{2x} \\ du = dx \quad \swarrow \quad v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{x}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx \\ &= \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C \end{aligned}$$

$$\therefore I = x^2 \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{x}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

دالة مثلثية / زاوية * كثيرة حدود
 نكاملها $\rightarrow$ نكاملها $\leftarrow$

$$I = \int x \sin x \, dx$$

$$u = x \quad \begin{array}{l} dx = \sin x \, dx \\ du = dx \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \int \\ \rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} x = -\cos x \end{array}$$

$$I = -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C$$

دالة لوغاريتمية * أي دالة
 نكاملها $\leftarrow$ نكاملها $\rightarrow$

$$* I = \int \ln x \, dx$$

$$u = \ln x \quad \begin{array}{l} dv = dx \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \int \\ \rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} v = x \end{array}$$

$$I = x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + C$$

$$* I = \int \ln(x^2 + 4) \, dx$$

$$u = \ln(x^2 + 4) \quad \begin{array}{l} dv = dx \\ du = \frac{2x}{x^2 + 4} dx \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \int \\ \rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} v = x \end{array}$$

$$I = x \ln(x^2 + 4) - \int \frac{(x^2 + 4) - 4}{x^2 + 4} dx$$

$$= x \ln(x^2 + 4) - 2 \left[\int 1 - \int \frac{4}{x^2 + 4} dx \right]$$

$$= x \ln(x^2 + 4) - 2 \left[x - 2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) \right] + C$$

٤ دالة عكسية * أي دالة
 نفاضلها نكاملها

ex:- $I = \int \sin^{-1} x \, dx$

$$u = \sin^{-1} x \quad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad v = x$$

$$I = x \sin^{-1} x + \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx \times \frac{2}{2}$$

$$= x \sin^{-1} x + \frac{2}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

٥ دالة أسية * دالة مثلثية

نكامل مرتين بس مع تثبت الدالة الى هفاضلها أو نكاملها في الحالين

ex:-

$$I = \int e^x \sin x \, dx$$

$$u = e^x \quad dv = \sin x \, dx$$

$$du = e^x dx \quad v = -\cos x$$

$$I = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

Put: $I_1 = \int e^x \cos x \, dx$

$$u = e^x \quad dv = \cos x \, dx$$

$$du = e^x dx \quad v = \sin x$$

$$I_1 = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \rightarrow I$$

$$\therefore I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$$

$$2I = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\therefore I = \frac{1}{2} e^x [-\cos x + \sin x]$$

* التكامل بالكسور الجزئية: integration by partial fraction:

- الحالة الأولى: $\hookrightarrow$ درجة البسط أكبر من درجة المقام أو يتساويها
- طريقة الحل: أولاً: قسمة مقولة
- ثانياً: طريقة الكسور الجزئية
- الحالة الثانية: $\hookrightarrow$ درجة البسط أقل من درجة المقام
- * طريقة الحل: الكسور الجزئية

$\hookrightarrow$ طريقة حل الكسور الجزئية:

- ① نجعل المقام في أبسط صورة ممكنة
- ② نجزي المقام
- ③ نضع مجاهيل في البسط A, B, C بشرط أن تكون درجة البسط أقل من درجة المقام بواحد
- * لو عني المقام من الدرجة الثانية نضرب البسط في الصورة $[AX+C]$ حيث x هو مجهول السؤال الأمامي
- $\hookrightarrow$ لو عني المقام مرفوع لأس 2 $\hookrightarrow$ نفتحله كسرين واحد يكون أس 1 والثاني يكون أس 2
- لو المقام مرفوع لأس 3 $\hookrightarrow$ نفتحله 3 كسور جزئية واحد أس 1 والثاني يكون أس 2 والثالث يكون أس 3
- ④ نكتب الكسور التي أعلنها = الكسور الأمامية للمسألة
- ⑤ نضرب طرفي المعادلة في المقام
- ⑥ نوجد قيم المجاهيل المفروضة $(A, B, \dots)$
- ⑦ نغوضها عن قيم المجاهيل ونكامل

* طريقة حل القسمة المطولة

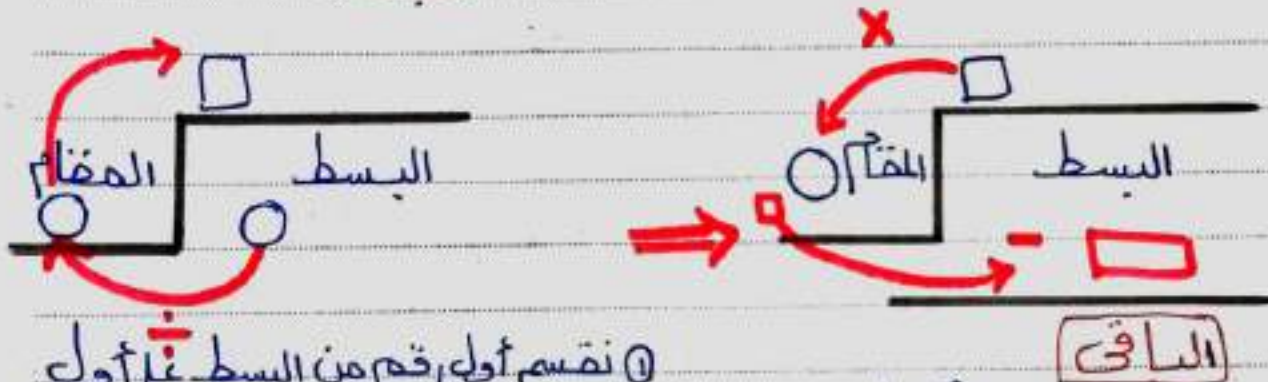
شكل القسمة المطولة $\Leftarrow$

الناتج

البسط

المقام

الباقى



① نقسم أول رقم من البسط على أول رقم من المقام من جهة الشمال ونخط الناتج فوق.

② نضرب الناتج في المقام كله ونطرح القيمة التي هتطلع من البسط ونحسب قيمة الباقي

$\Leftarrow$ أول ما توصل لأن درجة ~~الباقى~~ الباقي أقل من درجة المقام نوقف عليه القسمة

الناتج $\Leftarrow \int \frac{\text{الباقى}}{\text{المقام}} + \int \frac{\text{ناتج القسمة}}{\text{المطولة}}$

نعالج طريقة الكسور الجزئية

$$* \int \frac{x-1}{x^2-5x+6} dx$$

البسط درجته أقل من المقام
لذلك كسور جزئية على طول

$$\int \frac{x-1}{(x-3)(x-2)} dx$$

$$= \int \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-2)} = \int \frac{x-1}{(x-3)(x-2)}$$

بضرب طرفي المعادلة في المقام الرئيس

$$= [(x-2)A + (x-3)B = (x-1)]$$

لييجاد قيمة A, B ← نفرض قيم لـ (x) مثلاً ← عايرة الطول فقط
A ← نفرضها x برقم يضاف B بحذف

Let: $x=3$

$$A(3-2) + B(3-3) = (3-1) \Rightarrow \boxed{A=2}$$

Let: $x=2$

$$A(2-2) + B(2-3) = (2-1) \Rightarrow \boxed{B=-1}$$

$$\int \frac{2}{(x-3)} + \frac{-1}{(x-2)} \Rightarrow$$

$$= 2 \ln(x-3) - \ln(x-2) + C$$

$$I = \int \frac{2x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - x} dx$$

اليسط درجته أكبر من المقام
 (ل) أولاً قسمته لمطلوبة
 ثانياً كسور جزئية

$$\begin{array}{r} 2x \\ x^2 - x \overline{) 2x^3 - 2x^2 + 1} \\ \underline{2x^3 - 2x^2} \\ 1 \end{array}$$

ناتج القسمة

$$= \int 2x + \int \frac{1}{x^2 - x} dx$$

الباقى

المقام

$$= 2 \cdot \frac{x^2}{2} + \int \frac{1}{x^2 - x} dx$$

$$= x^2 + \int \frac{1}{x^2 - x} dx \Rightarrow$$

نعله كسور جزئية

$$\int \frac{1}{x^2 - x} dx \Rightarrow \int \frac{1}{x(x-1)} dx$$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} = \frac{1}{x(x-1)}$$

بمضرب طرفي المعادلة في $x(x-1)$

$$(x-1)A + xB = 1$$

Let: $x=0 \Rightarrow \boxed{A = -1}$

$x=1 \Rightarrow \boxed{B = 1}$

$$\int \frac{-1}{x} + \frac{1}{(x-1)} dx = -\ln x + \ln(x+1) + C$$

$$\boxed{I = x^2 - \ln x + \ln(x+1) + C}$$

* طريقة إكمال المربع : Completing Square *

* لنستخدمه متى؟ ← المقام أحش بيتحل ويستخلص بالقواعد الأساسية

* الطريقة

$$x^2 + 4x + 6$$

تربيع $+6$ (نفيه) $+6$ (جذر)

← تخفيف المسألة قبل إجراء عملية إكمال المربع
 [يجب أن يكون معامل x^2 واحد]
 [لو عشي كسر]

لـ نومل البسط لأنه يكون مشتقة المقام ونقسم المسألة

$$\int \frac{\text{مشتقة المقام}}{\text{المقام}} + \int \frac{\text{الباقى من البسط}}{\text{إكمال مربع المقام}}$$

ex: $\int \frac{3x-2}{4x^2-4x+5} dx$
 • بأخذ 3 عامل مشترك من البسط و 4 عامل مشترك من المقام

$$\frac{3}{4} \int \frac{x - \frac{2}{3}}{x^2 - x + \frac{5}{4}} dx$$

بمخرج 2 في البسط

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \int \frac{2x - \frac{4}{3}}{x^2 - x + \frac{5}{4}} dx$$

نجمع 1 ونطرح 1

$$\frac{3}{8} \int \frac{2x - 1 - \frac{4}{3} + 1}{x^2 - x + \frac{5}{4}} dx$$

نعمل إكمال مربع للمقام

$$(x^2 - x + \frac{5}{4})$$

$$\Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}$$

$$= (x - \frac{1}{2})^2 + 1$$

نقسم المسألة

$$\frac{3}{8} \int \frac{2x-1}{x^2-x+\frac{5}{4}} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+1}$$

$$= \frac{3}{8} \left[\ln(x^2 - x + \frac{5}{4}) - \frac{1}{3} \tan^{-1}(x - \frac{1}{2})^2 + C \right]$$

* Definite integral .. التكامل المحدود

$$① \int_b^a f'(x) dx = [F(x)]_b^a = [F(a)] - [F(b)]$$

$$② \int_b^a f'(x) dx = - \int_a^b f'(x) dx$$

$$③ \int_b^a f'(x) dx = \int_b^c f'(x) dx + \int_c^a f'(x) dx$$

$$④ \int_{-a}^a f'(x) dx \begin{cases} \xrightarrow{\text{if}} F(x) & \text{فردية odd} \\ \xrightarrow{\quad} F(x) & \text{زوجية even} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 2 \int_0^a f'(x) dx \end{cases}$$

$$F(x) \text{ فردية odd} \Rightarrow \int_b^a f'(x) dx = - \int_{-a}^{-b} f'(x) dx$$

$$F(x) \text{ زوجية even} \Rightarrow \int_b^a f'(x) dx = \int_{-a}^{-b} f'(x) dx$$

* Finding the area by integration ..

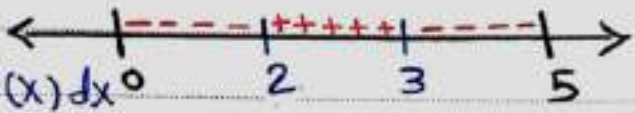
- ① نساوي الدالة بصفر ونطلع قيم x
- ② نرسم خط أعداد ونضع عليه أصفار المقام ونحدد عليه حدود التكامل المعطاه في السؤال ونبحث الاشارات
- ③ نكامل لنحسب المساحة

ex.: find area of $F(x) = 5x - x^2 - 6$, bet. $x=5$, y axis and x axis.

$$F(x) = -x^2 + 5x - 6 = -(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = 3, \quad x = 2$$

$$\text{area} = -\int_0^2 F(x) dx + \int_2^3 F(x) dx - \int_3^5 F(x) dx$$


$$= -\int_0^2 (5x - x^2 - 6) dx + \int_2^3 (5x - x^2 - 6) dx - \int_3^5 (5x - x^2 - 6) dx$$

$$= \frac{14}{3} + \frac{1}{6} + \frac{14}{3}$$

$$= \boxed{\frac{19}{2}}$$